Les équations du second degrés et les fractions continues

Benoit De Coninck

14 août 2014

1 Introduction

La racine positive d'une équation du second degré peut toujours être décomposée en une fraction continue avec une partie périodique. Le but des développements présentés dans ce document est de partir d'une période constatée dans un développement en fraction continue pour en proposer la racine d'origine.

2 Développement direct

Le développement direct consiste à analyser des racines qui présentent des simulitudes dans la partie périodique. Il est alors possible de proposer des équations générales regroupant ces racines. Par exemple :

1. $\sqrt{2} = [1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2 \ldots] = [1,\ \overline{2}]$
2. $\sqrt{5} = [2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4 \ldots] = [2,\ \overline{4}]$
3. $\sqrt{10} = [3,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6 \ldots] = [3,\ \overline{6}]$
4. $\sqrt{17} = [4,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8 \ldots] = [4,\ \overline{8}]$
5. ...

On constate :
- d'une part que : $2 = 1^2 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $10 = 3^2 + 1$, $17 = 4^2 + 1$
- et d'autre part que $2 = 2 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 4$...

donc en généralisant que $\sqrt{n^2+1} = [n,\ \overline{2n}]$.

Ce type de développement direct est rapidement assez indigeste. En outre, il ne permet que de dresser un catalogue de fraction continue périodique qui va rapidement devenir encyclopédique et peut efficace.

Une approche plus ciblée est nécessaire.

3 Développement inverse

La méthode du développement inverse consite à partir d'une période connue dans un développement en fraction continue pour en trouver la racine d'origine. Par exemple :

$N = [n, \overline{2n}]$: En ne prennant que la partie périodique, on pose que :

$$M = [2n,\, M] = \left[\frac{1}{0},\, \frac{2n}{1},\, \frac{2nM+1}{M}\right]$$

$$=>\ M = \frac{2nM+1}{M}$$

$$=>\ M^2 - 2nM - 1 = 0$$

$$=>\ M = \frac{2n + \sqrt{4n^2+4}}{2}$$

$$=>\ M = n + \sqrt{n^2+1} = [\overline{2n}]$$

En remplaçant la partie périodique par sa valeur M, nous avons à présent : $N = [n,\, M] \equiv N = n + \frac{1}{M}$

$$=>\ N = n + \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}}$$

$$=>\ N = \frac{n\left(n + \sqrt{n^2+1}\right) + 1}{n + \sqrt{n^2+1}}$$

$$=>\ N = \frac{n^2 + 1 + n\sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2+1}}$$

$$=>\ N = \frac{\sqrt{n^2+1}\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)}{n + \sqrt{n^2+1}}$$

$$=>\ N = \sqrt{n^2+1} = [n,\, \overline{2n}]$$

Cette méthode permet une recherche plus ciblée sur la période voulue, mais nécessite encore des développements qui vont vites en rendre l'application encore une fois indigeste.

4 Généralisation des développements

Il est possible de généraliser les développements des deux exemples précédents pour donner des formules directement applicable après le développement en fractions réduites

4.1 Fraction continue d'une suite périodique

Soit $N = [\overline{a,\, b,\, c,\, d}]$. Comme $N = [a,\, b,\, c,\, d,\, N]$qui donne la suite de fractions réduites

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{NC+A}{ND+B}\right]^{1}$$

$$=> \; N = \frac{NC+A}{ND+B} \; => \; DN^2 + (B-C)N - A = 0$$

$$=> \; N = \frac{(C-B) + \sqrt{(C-B)^2 + 4\,DA}}{2\,D}$$

qui est facilement utilisable avec des valeurs numériques ou symboliques.

Par exemple, soit $N = [\overline{n}]$, qui donne la suite de fractions réduites $\left[\frac{1}{0}, \frac{n}{1}\right]$ donc $A = 1$, $B = 0$, $C = n$ et $D = 1$, permet de trouver l'équation : $N = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$.

Par exemple, soit $N = [\overline{6,\, 5,\, 4,\, 3,\, 2,\, 1}]$, qui donne la suite de fractions réduites

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{31}{5}, \frac{130}{21}, \frac{421}{68}, \frac{972}{157}, \frac{1393}{225}\right]$$

permet de trouver le nombre $N = \frac{1236+\sqrt{2402496}}{450} = \frac{618+\sqrt{775^2-1}}{225}$.

4.2 Fraction continue d'une suite périodique symétrique

Soit $N = [n,\, \overline{a,\, b,\, c,\, d,\, c,\, b,\, a,\, 2n}]$: M $= [a,\, b,\, c,\, d,\, c,\, b,\, a,\, 2n,\, M]$ qui donne la suite de fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \ldots, \frac{E}{D}, \frac{B}{C}, \frac{2nB+E}{2nC+D}, \frac{(2nB+E)M+B}{(2nC+D)+C}\right]$$

$$=> \; (2nC+D)M^2 + CM = (2nB+E)M + B$$

avec $C = E$ puisque c'est une suite périodique symétrique.

$$=> \; (2nC+D)M^2 - 2nBM - B = 0$$

$$=> \; M = \frac{nB + \sqrt{n^2B^2 + B(2nC+D)}}{2nC+D}$$

$N = [n,\, M] \equiv N = n + \frac{1}{M}$

$$=> \; N = n + \frac{2nC+D}{nB + \sqrt{n^2B^2 + B(2nC+D)}}$$

1. $A = c(ab+1)+a$, $B = cb+1$, $C = d(c(ab+1)+a)+ab+1$ et $D = d(cb+1)+b$.

$$=> \ N = \frac{1}{B} \frac{n^2B^2 + nB\sqrt{n^2B^2 + B(2nC+D)} + B(2nC+D)}{nB + \sqrt{n^2B^2 + B(2nC+D)}}$$

$$=> \ N = \frac{1}{B} \sqrt{n^2B^2 + B(2nC+D)} \, \frac{nB + \sqrt{n^2B^2 + B(2nC+D)}}{nB + \sqrt{n^2B^2 + B(2nC+D)}}$$

$$=> \ N = \sqrt{\frac{n^2B^2 + B(2nC+D)}{B^2}}$$

$$=> \ N = \sqrt{n^2 + \frac{2nC+D}{B}}$$

qui est facilement utilisable avec des valeurs numériques ou symboliques.

Par exemple, soit $N = [n, \overline{k, \, k, \, 2n}]$. On ne prend que la partie répétitive $[\overline{k, \, k, \, 2n}]$ qui donne la suite de fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{k}{1}, \frac{k^2+1}{k}, \frac{2(k^2+1)n+k}{2nk+1}\right]$$

alors :

$$N = \sqrt{n^2 + \frac{2nk+1}{k^2+1}}$$

Par exemple, soit $N = [n, \overline{2, \, 3, \, 2, \, 2n}]$. On ne prend que la partie répétitive $[\overline{2, \, 3, \, 2, \, 2n}]$ qui donne la suite de fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{16}{7}, \frac{32n+7}{14n+3}\right]$$

alors :

$$N = \sqrt{n^2 + \frac{14n+3}{16}}$$

5 Utilisation

5.1 Expression différentes

Les différents développement permettent de constater qu'une même racine peut être exprimées par différentes fractions continues périodiques.

Par exemple, $\sqrt{20} = \sqrt{4(2^2+1)} = [4, \overline{2, \, 8}] = \sqrt{4((3/2)^2 + 3/2) + 5} = [4, \overline{3/2, \, 1, \, 1, \, 3/2, \, 8}]$. On constate que l'on peut également exprimer que $\sqrt{20} = [4, \, 3/2, \, \overline{1}]$. Comme nous avons montré que $[\overline{n}] = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$, nous pouvons remplacer $[\overline{1}]$ par sa valeur $\frac{1+\sqrt{1^2+4}}{2}$.

Cette dernière fraction continue peut donc également s'écrire $\sqrt{20} = [4,\ 3/2,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ qui n'est plus périodique (la périodicité est masquée dans $\sqrt{5}$). Un développement en fractions réduites de ce résultat se résume à écrire que $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

5.2 Plus loin que l'or

L'expression $\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ est la racine positive de l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$. En attribuant la valeur 1 à n on retrouve le « nombre d'or » $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous pouvons transformer cette équation de diverses manières :

1. $x = n + \frac{1}{x} = n + \frac{1}{n+\frac{1}{x}} = n + \frac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\dots}}}$
2. $x = \sqrt{1+nx} = \sqrt{1+n\sqrt{1+nx}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+n\sqrt{1+n\sqrt{\dots}}}}$
3. $x^2 = nx + 1$
4. $x^3 = (n\,n+1)\,x + n = (n^2+1)\,x + n$
5. $x^4 = (n(n^2+1)+n)x + (n^2+1) = (n^3+2n)\,x + n^2 + 1$
6. $x^5 = (n(n^3+2n)+(n^2+1))x + (n^3+2n) = (n^4+3n^2+1)\,x + n^3 + 2n$
7. $x^6 = (n^5+4n^3+3n)\,x + n^4 + 3n^2 + 1$
8. $x^7 = (n^6+5n^4+6n^2+1)\,x + n^5 + 4n^3 + 3n$
9. ...

En attribuant la valeur de π à n, on peut s'amuser à écrire que :

1. $\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}{2} = 3.4328922159\ldots = \pi + \frac{1}{\pi+\frac{1}{\pi+\frac{1}{\pi+\dots}}} = [\overline{\pi}]$
2. $\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}{2} = \sqrt{1+\pi\sqrt{1+\pi\sqrt{1+\pi\sqrt{\dots}}}}$

On peut reprendre la valeur $\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}{2}$ comme valeur de n pour obtenir le nombre $\frac{\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}{2}\right)^2+4}}{2} = 3.702947364 = \left[\overline{\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}{2}}\right]$. Si l'on poursuit ce processus, nous obtenons la série : [3.141592, 3.432892, 3.702947, 3.955744, 4.194170, 4.420394, 4.636093, ...]

Cette série est-elle convergente ou divergente ? Est-ce la même chose pour les séries issuent d'autres points de départ ?

Si l'on calcule une série avec $n = 0$ comme départ, on obtient les valeurs [0, 1, 1.618033, 2.095293, 2.495943, ...]. A l'évidence, cette série contient la série ayant pour départ $n = 1$, seul le départ 0 étant différent. Est-ce un cas unique ? Les autres séries partant des entiers positifs sont-elles toutes uniques, ou certaines séries contiennent-elles d'autres séries ?

5.3 Fraction continue périodique pseudo-universelle

Presque tous les nombres peuvent être mis sous forme d'une fraction continue périodique de type $[\overline{n}]$.

En effet, l'équation source de cette fraction continue est $x = n + \frac{1}{x} = [\overline{n}]$, donc, $n = x - \frac{1}{x}$ et finalement, $x = \left[\overline{x - \frac{1}{x}}\right] = \left[\overline{\frac{x^2-1}{x}}\right]$, par exemple :

$$\pi = \left[\overline{\frac{\pi^2-1}{\pi}}\right] = \frac{\pi^2-1}{\pi} + \frac{1}{\frac{\pi^2-1}{\pi} + \frac{1}{\frac{\pi^2-1}{\pi} + \dots}} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2-1}{\pi}\sqrt{1 + \frac{\pi^2-1}{\pi}\sqrt{1 + \dots}}}$$

On peut même écrire les entiers sous forme de fraction continue, par exemple :

$$2 = \left[\overline{\frac{3}{2}}\right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2} + \dots}} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt{1 + \dots}}}$$

Que faire pour $x = 1 = \left[\overline{\frac{1-1}{1}}\right] = [\overline{0}]$ et $x = -1 = \left[\overline{\frac{1-1}{-1}}\right] = [\overline{-0}]$? Si l'écriture de $1 = \sqrt{1 + 0\sqrt{1 + 0\sqrt{1 + \dots}}}$ est triviale, celle de $1 = 0 + \frac{1}{0 + \frac{1}{0 + \dots}}$ passe encore, par contre, $-1 = -0 + \frac{1}{-0 + \frac{1}{-0 + \dots}}$ est moins évidente.

Pour ma part, l'égalité $x = 0 = \left[\overline{\frac{0-1}{0}}\right]$ est simplement en dehors du domaine de définition.